

Examen suisse de maturité, session d'hiver 2025

MATHEMATIQUES, DISCIPLINE FONDAMENTALE - niveau normal

Candidat-e: Nom : Prénom : Numéro :

Durée: 4 heures

Matériel autorisé: calculatrice et formulaires/tables

Total de points: 50 points

Consignes générales

Avant de débiter, contrôler le présent document, notamment l'ordre et le nombre de pages. Les réponses se font sur papier libre, à l'exception de celles demandées dans les espaces prévus à cet effet. A la fin de votre examen, rendre ce document avec votre travail.

Formulaires et tables et **calculatrice** sont autorisés lors de cet examen. Vous pouvez obtenir un **total maximal de 50 points**.

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement les problèmes 1 et 2, qui sont **obligatoires**, et **deux problèmes à choix** parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Nombre de points obtenus : Problème 1: sur 15 pts

Problème 2: sur 15 pts

Problème 3: sur 10 pts

Problème 4: sur 10 pts

Problème 5: sur 10 pts

Total: **sur 50 pts**

Note

Examineur-trice en charge de la correction :

Remarque éventuelle :

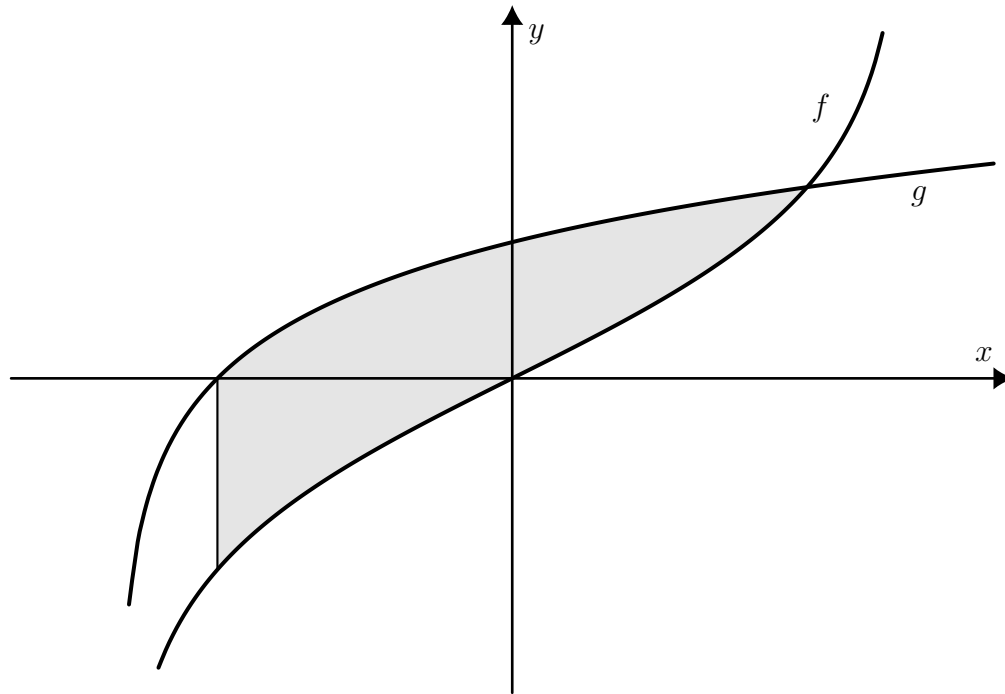
.....

Problème 1 (obligatoire, 15 points)

On considère les fonctions f et g définies par leurs expressions algébriques

$$f(x) = \ln(4+x) - \ln(4-x) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(4+x)$$

et représentées graphiquement ci-dessous.



- Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f et le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de la fonction g .
- Calculer les zéros de f et de g .
- Montrer que f est une fonction impaire.
- Montrer que f est croissante sur son domaine de définition.
- On considère la fonction K définie par

$$K(x) = -x - (4-x) \ln(4-x).$$

Montrer que $K(x)$ est une primitive de la fonction $g - f$.

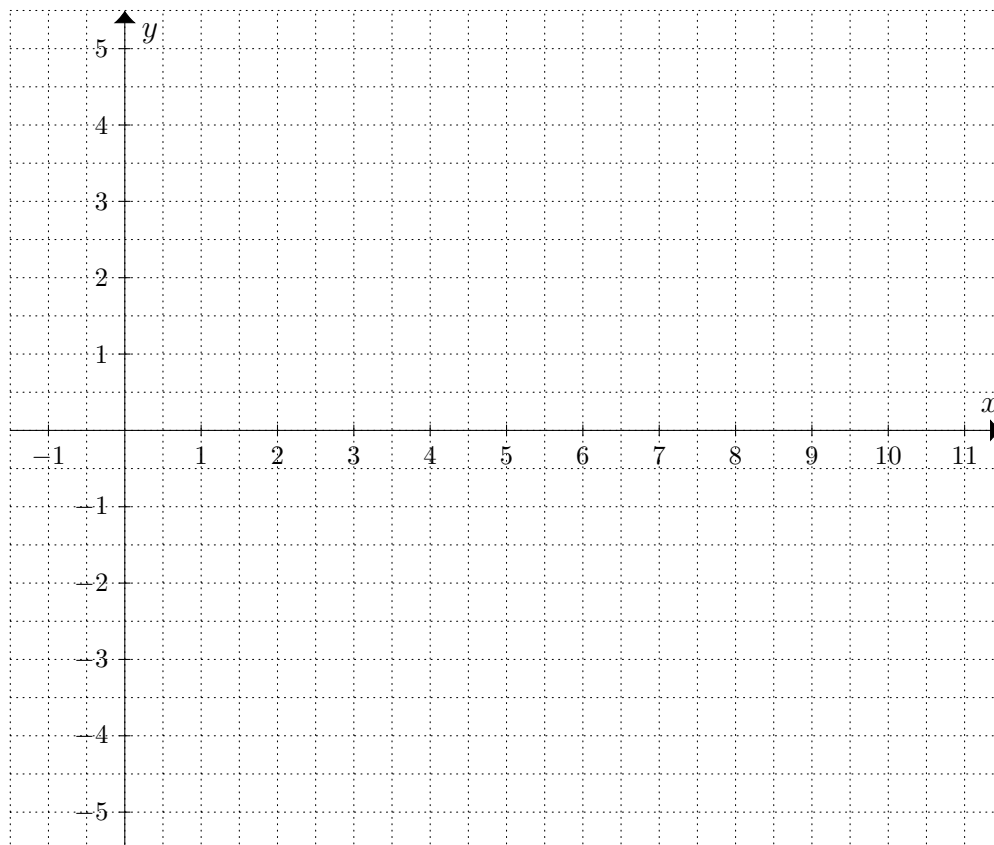
- Montrer que l'abscisse du point d'intersection entre les graphes de f et de g vaut 3.
- Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface grisée dans l'illustration ci-dessus.

Problème 2 (obligatoire, 15 points)

On considère le cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 - 12x + 16 = 0$ ainsi que les points $A(2; 2)$, $B(10; 2)$ et $C(4; -4)$.

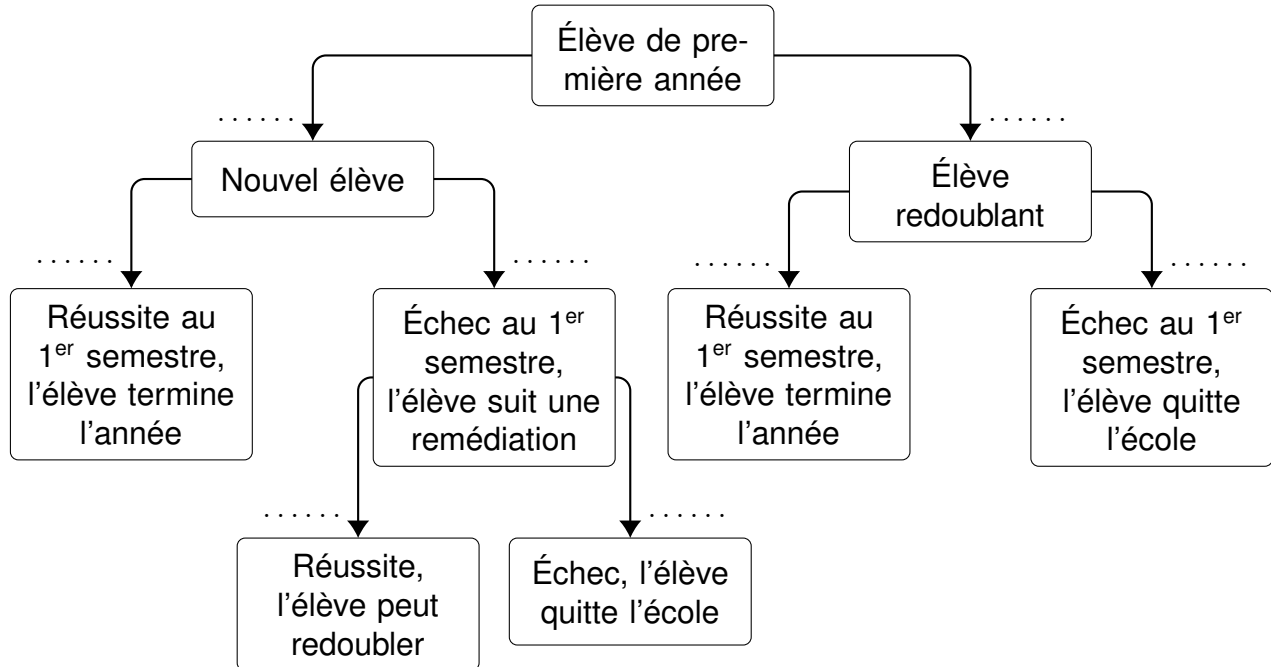
Représenter soigneusement ci-dessous, au fur et à mesure de leur apparition, tous les éléments définis au cours de la résolution du problème. Si les coordonnées d'un point n'ont pu être trouvées par calcul, il est permis de les lire sur la représentation graphique pour continuer le problème. Signaler alors clairement que vous lisez une donnée sur le schéma.

- Montrer que le point $M(6; 0)$ représente le centre de Γ . Calculer également le rayon r de Γ .
- Montrer que le point A est situé sur le cercle Γ .
- Montrer que le triangle MBC est isocèle. En déduire la position relative des points B et C par rapport au cercle.
- Calculer la valeur de l'angle aigu α formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
- Déterminer une équation cartésienne de la hauteur h_A du triangle ABC issue de A , ainsi que les coordonnées de A' , le pied de cette hauteur.
- Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC .
- Déterminer les coordonnées de H' , le second point d'intersection de la hauteur h_A avec le cercle Γ . Vérifier par calcul que A' est le milieu de HH' .



Problème 3 (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)

L'arbre ci-dessous illustre le parcours d'un élève de première année d'une école privée d'informatique.



On comptabilise, parmi les élèves du premier semestre de première année, 75% de nouveaux élèves ; les autres sont des élèves redoublants leur première année. Le taux de réussite du premier semestre est de 35% pour les nouveaux élèves et de 92% pour les redoublants. En cas d'échec, les redoublants quittent l'école, alors que les nouveaux élèves intègrent un cours de remédiation. Le cours de remédiation donne lieu à un examen qui a un taux de réussite de 74%. Alors que la réussite de l'examen de remédiation permet le redoublement de l'année, l'échec de la remédiation est, lui, définitif et signifie que l'élève doit quitter l'école.

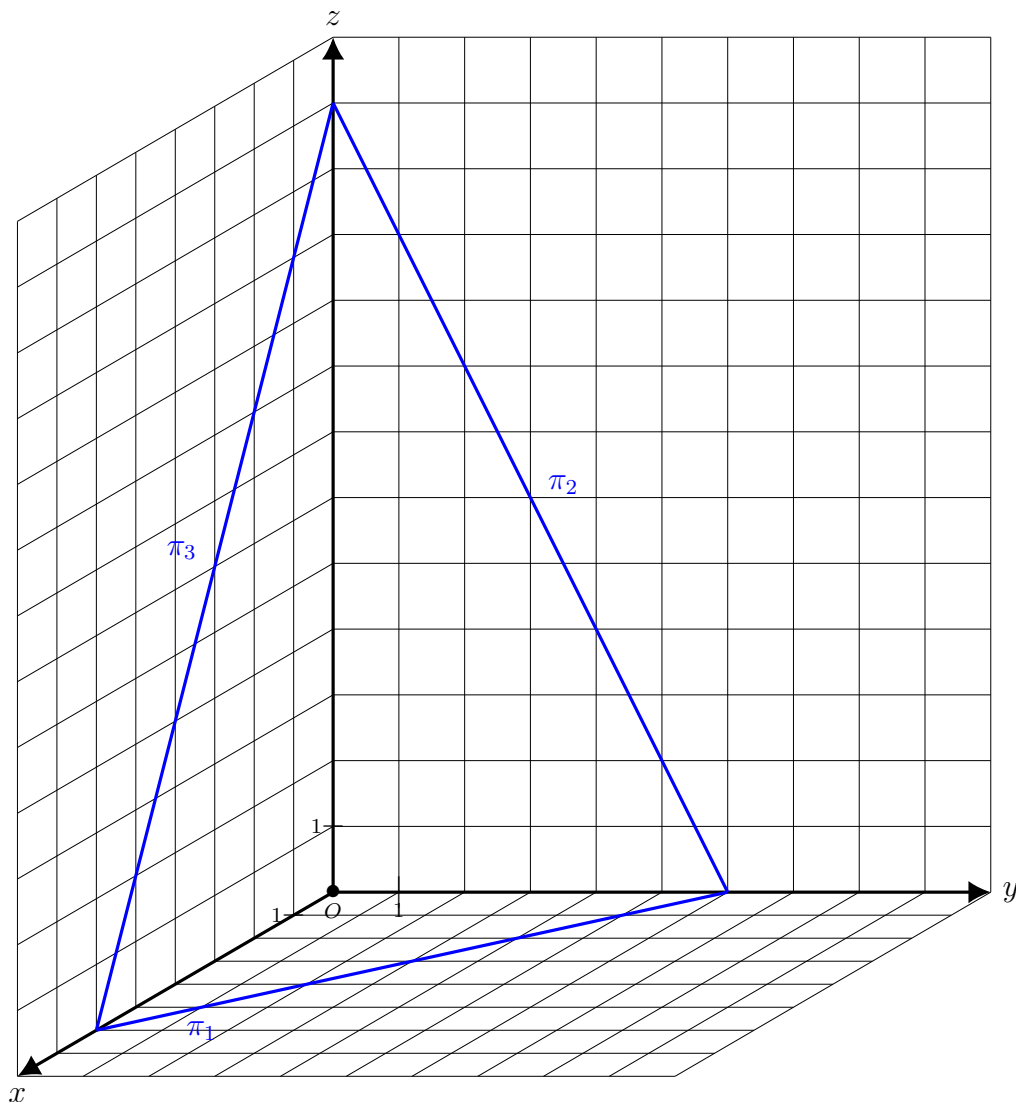
- Compléter l'arbre ci-dessus directement à l'endroit des traitillés en indiquant la probabilité de chaque événement.
- On croise un élève de l'établissement ; quelle est la probabilité que cet élève soit un redoublant en échec au premier semestre ?
- On croise un élève de l'établissement ; quelle est la probabilité que cet élève soit un nouvel élève obligé de quitter l'école au terme de l'année ?
- Calculer la probabilité qu'un élève réussisse son premier semestre.
- Sachant qu'un élève a dû quitter l'école, calculer la probabilité qu'il s'agissait d'un élève redoublant.
- Sachant qu'un élève a fait partie des nouveaux étudiants, calculer la probabilité qu'il ait dû suivre le cours de remédiation et qu'il l'ait réussi.

Problème 4 (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

On a dessiné le plan π dans le repère ci-dessous. On donne également, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les équations paramétriques des droites

$$d : \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \quad \text{et} \quad e : \begin{cases} x = 2 \\ y = -8 - 6\mu \\ z = 7 + 3\mu \end{cases}$$

- Quelle est la position relative des droites d et e ?
- Donner une représentation paramétrique du plan π dessiné ci-dessous.
- Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite d avec les plans de référence, puis dessiner, dans le repère ci-dessous, la partie visible de cette droite.
- On donne le cube $OABCDEFGH$. Le sommet O correspond à l'origine. De plus, on connaît les sommets $A(4; 0; 0)$, $B(4; 4; 0)$, $C(0; 4; 0)$ et $D(0; 0; 4)$. Dessiner, dans le repère ci-dessous, le quadrilatère d'intersection entre le cube et le plan π . Calculer son périmètre.
- Calculer les coordonnées des points d'intersection M et N de la droite d avec le cube.



Problème 5 (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

Robert veut construire une boîte avec couvercle en forme de parallélépipède rectangle à base carrée. Il souhaite que le volume de la boîte soit de 3 dm^3 .

Afin qu'elle soit jolie, il va utiliser une essence de bois qui coûte 50 francs au décimètre carré pour fabriquer le couvercle supérieur et une essence de bois qui coûte 10 francs au décimètre carré pour les autres faces.

- a) Montrer que le coût de fabrication d'une telle boîte peut s'écrire à l'aide de la fonction :

$$c(x) = 60x^2 + \frac{120}{x}, \text{ avec } x > 0 \text{ représentant le côté de la base carrée (en dm).}$$

- b) Déterminer les dimensions de la boîte pour que le coût de fabrication soit minimal.
- c) Que vaut alors ce coût minimal ?