

Examen suisse de maturité, session d'hiver 2024

MATHEMATIQUES, DISCIPLINE FONDAMENTALE - niveau normal

Candidat-e: Nom : Prénom : Numéro :

Durée: 4 heures

Matériel autorisé: calculatrice et formulaires/tables

Total de points: 50 points

Consignes générales

Avant de débiter, contrôler le présent document, notamment l'ordre et le nombre de pages. Les réponses se font sur papier libre, à l'exception de celles demandées dans les espaces prévus à cet effet. A la fin de votre examen, rendre ce document avec votre travail.

Formulaires et tables et **calculatrice** sont autorisés lors de cet examen. Vous pouvez obtenir un **total maximal de 50 points**.

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement les problèmes 1 et 2, qui sont **obligatoires**, puis **deux problèmes à choix** parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Nombre de points obtenus : Problème 1: sur 15 pts

Problème 2: sur 15 pts

Problème 3: sur 10 pts

Problème 4: sur 10 pts

Problème 5: sur 10 pts

Total: **sur 50 pts**

Note

Examineur-trice en charge de la correction :

Remarque éventuelle :

.....

Problème 1 (obligatoire, 15 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{4x - 5}$.

a) Montrer que l'on peut écrire f de la manière suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{5}{8} + \frac{9}{8(4x - 5)}$$

b) Étudier cette fonction, c'est-à-dire donner le domaine de définition, les zéros et le signe de f , les équations des éventuelles asymptotes, les coordonnées des points à tangente horizontale, la croissance de f et finalement dessiner le graphe soigné de f .

c) Calculer l'aire de la surface fermée comprise entre l'axe des x et le graphe de f .

d) On considère maintenant la fonction g définie par $g(x) = \frac{2x^2 + k}{4x - 5}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de k cette fonction n'admet-elle aucun point à tangente horizontale ?

Problème 2 (obligatoire, 15 points)

On donne l'équation du cercle $\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 10x + 16y + 60 = 0$, le point $A(7; -3)$ et les droites $d_1 : x - y - 16 = 0$ et $d_2 : 5x - 2y - 12 = 0$.

a) Déterminer le rayon r_1 et les coordonnées du centre C_1 du cercle Γ_1 .

b) Vérifier par calculs que $A \in \Gamma_1$.

c) Prouver par calculs que la droite d_2 est tangente au cercle Γ_1 .

d) Montrer que le cercle Γ_1 et la droite d_1 se coupent en deux points P_1 et P_2 . Déterminer les coordonnées de ces deux points.

e) Soit $B(15; -3)$. Déterminer l'équation cartésienne du cercle Γ_2 passant par les points A et B et dont le centre C_2 est situé sur la droite d_1 .

Problème 3 (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)

On admet que, pour un âge x compris entre 15 et 65 ans, la capacité pulmonaire de l'être humain, exprimée en litres, peut être modélisée par la fonction c définie par :

$$c(x) = -\frac{x}{10} + \ln(4x^2) \quad \text{pour } x \in [15 ; 65].$$

- a) Dans l'intervalle considéré, à quel âge la capacité pulmonaire est-elle minimale ?
- b) Dans l'intervalle considéré, à quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale ?
- c) Que valent alors ces capacités pulmonaires minimale et maximale ?

Problème 4 (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

Un sondage a été effectué auprès des anciens élèves d'un gymnase suisse quelques années après l'obtention de leur maturité.

Ce sondage révèle que 55% d'entre eux poursuivent leurs études à l'université, 10% ont intégré une HES et le pourcentage restant est sur le marché du travail (en activité ou en recherche d'emploi).

Ce sondage révèle aussi que :

- 45% des anciens élèves qui poursuivent leurs études à l'université ont fait le choix de vivre en colocation.
- 30% des anciens élèves qui ont intégré une HES ont fait le choix de vivre en colocation.
- 15% des anciens élèves sur le marché du travail ont fait le choix de vivre en colocation.

- a) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre.
- b) Calculer la probabilité qu'un ancien élève tiré au hasard poursuive ses études à l'université tout en vivant en colocation.
- c) Calculer la probabilité qu'un ancien élève tiré au hasard ne vive pas en colocation.
- d) Un ancien élève vit en colocation. Calculer la probabilité qu'il poursuive ses études dans une HES.
- e) Le responsable du sondage affirme : "Plus de la moitié des anciens élèves n'ayant pas fait le choix de la colocation poursuivent des études (université ou HES)". Cette affirmation est-elle correcte ? Justifier votre réponse par un calcul.

Problème 5 (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

- a) Dans le système d'axes proposé ci-dessous, représenter la partie visible de la droite d d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 2 - 2k \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$
- b) Déterminer une équation du plan π passant par les points $A(0; 2; 4)$, $B(0; 6; 2)$ et parallèle à la droite d . Dans le système d'axes proposé ci-dessous, représenter ce plan.
- c) Dans le système d'axes proposé ci-dessous, représenter le point $P(2; 4; 1)$. Ce point est-il situé dans le plan π ? Justifier la solution.
- d) On nomme d_{BP} la droite passant par les points B et P . Déterminer les coordonnées du point d'intersection I entre la droite d_{BP} et le sol.
- Définition : on nomme sol, le plan contenant les axes O_x et O_y .*
- e) Calculer les distances du point P aux trois axes de coordonnées.

