



Examen suisse de maturité, session d'été 2024

MATHEMATIQUES, DISCIPLINE FONDAMENTALE - niveau normal

Candidat-e : Nom : Prénom : Numéro :

Durée : 4 heures

Matériel autorisé : calculatrice et formulaires/tables

Total de points : 50 points

Consignes générales

Avant de débiter, contrôler le présent document, notamment l'ordre et le nombre de pages. Les réponses se font sur papier libre, à l'exception de celles demandées dans les espaces prévus à cet effet. À la fin de votre examen, rendre ce document avec votre travail.

Formulaires et tables et calculatrice sont autorisés lors de cet examen. Vous pouvez obtenir un **total maximal de 50 points**.

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement **les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires** puis **deux problèmes à choix parmi les problèmes 3, 4 et 5**.

Nombre de points obtenus :	Problème 1 :		sur 15 pts
	Problème 2 :		sur 15 pts
	Problème 3 :		sur 10 pts
	Problème 4 :		sur 10 pts
	Problème 5 :		sur 10 pts
	Total :		sur 50 pts

Note

Examineur(s)-trice(s) en charge de la correction :
.....

Remarque éventuelle :
.....

Problème 1 (obligatoire, 15 points)

Pour $a \in \mathbb{R}^*$, on considère la fonction f définie par $f(x) = (2x + 1) \cdot e^{1-ax}$.

- a) Montrer que $f'(x) = (2 - 2ax - a) \cdot e^{1-ax}$.
- b) Montrer que le graphe de f possède toujours un point à tangente horizontale.
- c) Pour quelle valeur de a l'abscisse du point à tangente horizontale vaut-elle 2 ?

Pour la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{2}$.

On s'intéresse donc désormais à la fonction f définie par $f(x) = (2x + 1) \cdot e^{1-\frac{1}{2}x}$.

- d) Étudier cette fonction, c'est-à-dire donner le domaine de définition, le(s) zéro(s), l'ordonnée à l'origine, le signe de f , les équations des éventuelles asymptotes, les coordonnées du point à tangente horizontale, la croissance de f et, enfin, dessiner le graphe soigné de f .

- e) Montrer que $F(x) = (-4x - 10) \cdot e^{1-\frac{1}{2}x}$ est une primitive de f .

- f) On considère la fonction linéaire g passant par le point $A(2; f(2))$. Celui-ci est l'unique point d'intersection entre f et g dans le premier quadrant ($x > 0$ et $y > 0$).

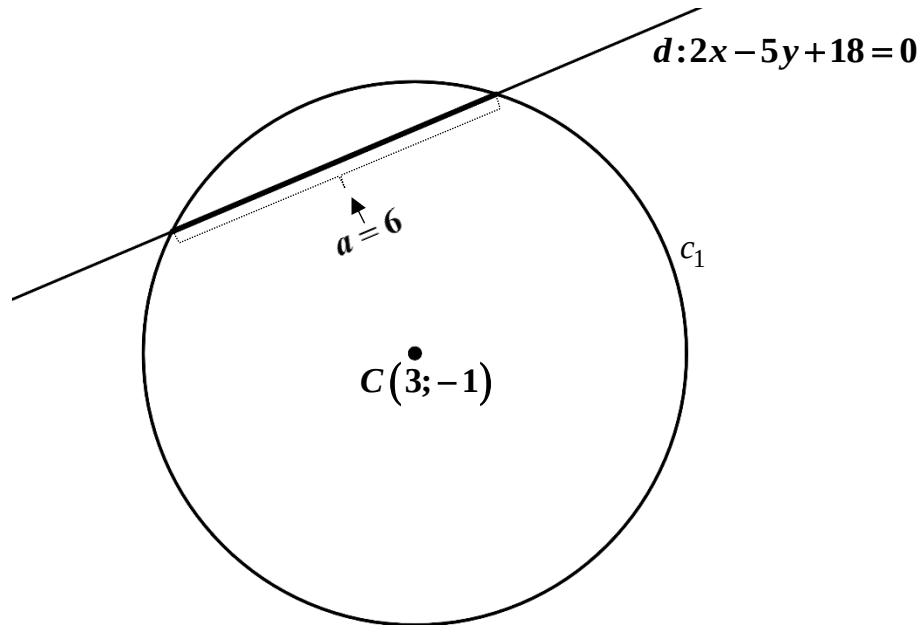
Calculer l'aire de la surface fermée, dans le premier quadrant, délimitée par les graphes de f et de g et l'axe des ordonnées.

Problème 2 (obligatoire, 15 points)

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes.

Partie 1 :

Dans la figure ci-dessous, déterminer l'équation du cercle c_1 .



Partie 2 :

On considère les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $2x + y - 5 = 0$ et $2x + y + 15 = 0$ ainsi que le cercle c_2 tangent aux deux droites et passant par le point $A(2; 1)$.

- Dans un repère orthonormé, représenter les deux droites et le cercle c_2 .
- Déterminer algébriquement l'équation du cercle c_2 .

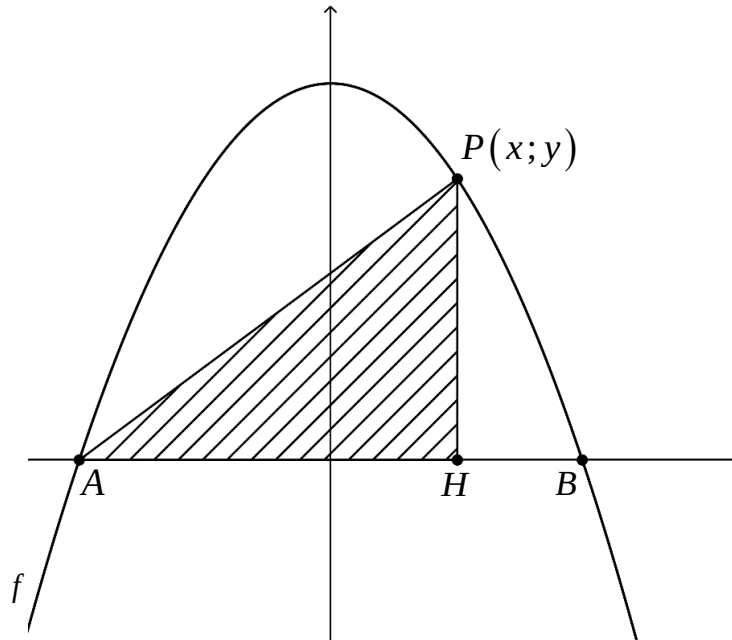
Problème 3 (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)

On considère les cinq points $A(2; -3; -1)$, $B(1; 1; 0)$, $C(0; -2; 1)$, $D(0; 0; 3)$ et $E(1; -1; t)$ où $t \in \mathbb{R}$.

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par les points A et C .
- Déterminer une représentation paramétrique du plan π contenant les points A , B et C .
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection Q de la droite d et du plan Oxz .
- Déterminer algébriquement les coordonnées du point F afin que le quadrilatère $CBFD$ soit un parallélogramme.
- Calculer toutes les valeurs possibles de t afin que le triangle BCE soit rectangle en E .

Problème 4 (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2 + 36$ dont on donne la représentation graphique ci-dessous. Cette dernière coupe l'axe des abscisses en A et en B .
Le point $P(x; y)$ se déplace sur la parabole entre A et B .



- a) Déterminer les coordonnées du point P afin que l'aire du triangle rectangle AHP soit maximale.
- b) Déterminer l'aire maximale de ce triangle.

Problème 5 (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

On dispose de deux dés verts normaux et d'un dé rouge dont toutes les faces valent SIX :



On choisit au hasard un dé parmi les trois dés.

- a) On le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir un SIX ?
- b) On le lance deux fois. Montrer que la probabilité d'obtenir SIX les deux fois est de $\frac{19}{54}$.
- c) On le lance deux fois. On obtient SIX les deux fois. Quelle est la probabilité que l'on ait choisi le dé rouge ?

On choisit au hasard, successivement et sans remise, deux dés parmi les trois dés.

- d) Quelle est la probabilité que le dé rouge figure parmi les dés choisis ?
- e) On lance les deux dés choisis. Quelle est la probabilité d'obtenir un DOUBLE-SIX ?

On lance les trois dés.

- f) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un SIX ?
- g) Quelle est la probabilité d'obtenir au plus deux SIX ?