



## Examen suisse de maturité, session d'hiver 2023

### MATHÉMATIQUES, DISCIPLINE FONDAMENTALE - niveau normal

Candidat-e : Nom : ..... Prénom : ..... Numéro : .....

**Durée : 4 heures**

**Matériel autorisé : calculatrice et formulaires/tables**

**Total de points : 50 points**

#### Consignes générales

Avant de débiter, contrôler le présent document, notamment l'ordre et le nombre de pages. Les réponses se font sur papier libre, à l'exception de celles demandées dans les espaces prévus à cet effet. A la fin de votre examen, rendre ce document avec votre travail.

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont **obligatoires** ;
- puis **deux problèmes à choix** parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Nombre de points obtenus : Problème 1 : ..... sur 15 pts

Problème 2 : ..... sur 15 pts

Problème 3 : ..... sur 10 pts

Problème 4 : ..... sur 10 pts

Problème 5 : ..... sur 10 pts

**Total :** ..... **sur 50 pts**

|      |
|------|
| Note |
|------|

Examineur-trice en charge de la correction : ..... Date : .....

Remarque éventuelle : .....

.....

## Problème 1 (obligatoire, 15 points)

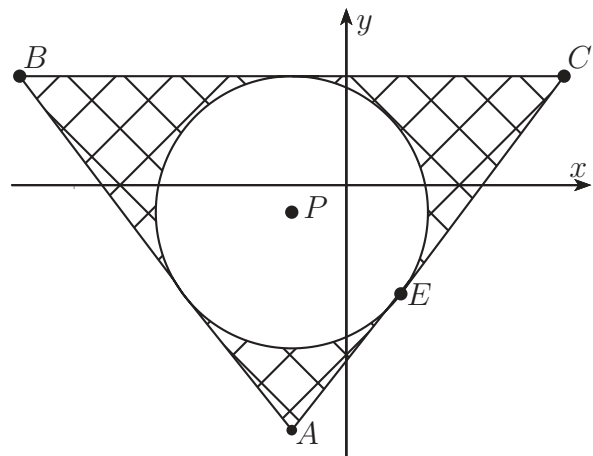
Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ .

- Étudier cette fonction, c'est-à-dire donner le domaine de définition, le(s) point(s) d'intersection de  $f$  avec les axes, le signe de  $f$ , les équations des éventuelles asymptotes, les coordonnées des points à tangente horizontale, l'étude de la croissance de  $f$  et finalement dessiner dans un repère orthonormé le graphe soigné de  $f$ .
- Hachurer, dans le même repère que  $f$ , l'aire du domaine délimité par le graphe de  $f$ , la droite  $y = x + 2$  et les droites verticales  $x = -1$  et  $x = 0$ . Calculer cette aire.
- Dans le même repère que  $f$ , représenter également la droite  $d : y = \frac{3}{4}x$ . Déterminer par calcul toutes les valeurs de  $a$  pour lesquelles la tangente à  $f$  au point  $(a; f(a))$  est parallèle à  $d$ .

## Problème 2 (obligatoire, 15 points)

Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne les points  $C(8; 4)$  et  $P(-2; -1)$ . On considère le triangle  $ABC$  isocèle en  $A$ , dont la base  $BC$  est parallèle à l'axe  $Ox$ , et dont  $P$  est le centre du cercle inscrit.

Une esquisse de la situation se trouve sur la droite de votre donnée.

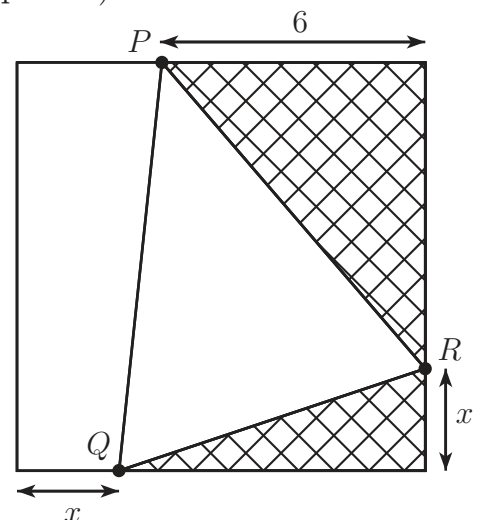


- Donner l'équation du cercle  $c$  inscrit dans le triangle  $ABC$ .
- Déterminer l'équation de la bissectrice intérieure issue du sommet  $A$ .
- Montrer que la droite  $d : 4x - 3y - 20 = 0$  passe par  $C$  et est tangente au cercle inscrit  $c$ .
- Déterminer les coordonnées des points  $A$ ,  $B$  et  $E$ ,  $E$  étant le point de contact entre la droite  $d$  et le cercle  $c$ .
- Calculer l'aire hachurée sur la figure ci-dessus.
- Calculer les angles du triangle  $ABC$ .

## Problème 3 (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)

Comme sur le dessin ci-contre, on dispose d'un carré dont les côtés valent 10 cm et de 3 points  $P$ ,  $Q$  et  $R$ . Le point  $P$  est un point fixe et les deux autres points sont mobiles, chacun sur une des arêtes du carré. Dans notre problème, on suppose que  $x$  puisse prendre des valeurs entre 1 et 10.

- Que vaut l'aire hachurée  $A$  lorsque  $x = 1$  ?
- Déterminer la valeur de  $x$  afin que l'aire hachurée représente le 30 % de l'aire du carré.
- Déterminer la valeur de  $x$  afin que l'aire  $A$  soit maximale. Vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum puis donner la valeur maximale de l'aire  $A$ .



#### Problème 4 (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

Muriel va tous les matins d'école à la boulangerie du coin de la rue où elle habite pour y acheter ce qu'elle mangera durant la récréation.

Ce qu'elle préfère par-dessus tout est le gâteau à la crème, dont elle prend toujours une grande tranche si le boulanger en a préparé, ce qui malheureusement n'arrive que deux fois sur cinq. Dans ce cas, elle est assurée de ne pas avoir faim avant midi.

Lorsqu'il n'y a pas de gâteau à la crème, elle se rabat dans 60 % des cas sur un pain au chocolat, et dans 30 % des cas sur un croissant. Le reste du temps, elle préfère, par dépit, ne rien manger à la récréation.

Elle a faim avant midi une fois sur quatre lorsqu'elle prend un pain au chocolat, et deux fois sur trois si elle choisit un croissant. Enfin, si elle ne mange rien à la récréation, elle a toujours faim avant midi.

Aujourd'hui il y a école et Muriel passe, comme tous les jours, à la boulangerie.

- a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre.
- b) Montrer que la probabilité que Muriel ait faim avant midi est de 27 %.
- c) Quelle est la probabilité qu'elle mange un croissant ou un pain au chocolat et qu'elle n'ait pas faim avant midi ?
- d) Si elle a faim avant midi, quelle est la probabilité que ce soit parce qu'elle n'a rien mangé à la récréation ?
- e) Si le boulanger n'a pas préparé de gâteau à la crème, quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas faim avant midi ?

On considère une semaine d'école de cinq jours.

- f) Quelle est la probabilité que Muriel n'ait jamais eu faim avant midi de toute la semaine ?

#### Problème 5 (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

On donne les points  $A(2; 1; 4)$ ,  $B(4; 5; 8)$ ,  $C(5; 13; -5)$  et  $D(3; 9; -9)$ .

- a) L'aire du triangle  $ABC$  vaut 45. On nomme  $h$  la hauteur du triangle  $ABC$  issue de  $C$  et  $c$  la base du triangle  $ABC$  associée à la hauteur  $h$ . Que valent les grandeurs  $h$  et  $c$  ?  
Le triangle  $ABC$  est-il équilatéral, isocèle, rectangle ou quelconque ? Justifier votre solution.
- b) Donner des équations paramétriques du plan  $\pi$  contenant les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  puis vérifier si  $D$  appartient également au plan  $\pi$ .  
Donner également les coordonnées d'un point  $P$  sur l'axe  $Oy$  qui appartient au plan  $\pi$ .
- c) On note  $A'$  le milieu du segment  $AB$ ,  $B'$  le milieu du segment  $BC$ ,  $C'$  le milieu du segment  $CD$  et enfin  $D'$  le milieu du segment  $DA$ .  
Calculer les coordonnées des points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  puis montrer que le quadrilatère  $A'B'C'D'$  est un parallélogramme.