



## Examen suisse de maturité, session d'été 2023

### MATHÉMATIQUES, DISCIPLINE FONDAMENTALE - niveau normal

Candidat-e : Nom : ..... Prénom : ..... Numéro : .....

**Durée : 4 heures**

**Matériel autorisé : calculatrice et formulaires/tables**

**Total de points : 50 points**

#### Consignes générales

Avant de débiter, contrôler le présent document, notamment l'ordre et le nombre de pages. Les réponses se font sur papier libre, à l'exception de celles demandées dans les espaces prévus à cet effet. À la fin de votre examen, rendre ce document avec votre travail.

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont **obligatoires** ;
- puis **deux problèmes à choix** parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Nombre de points obtenus : Problème 1 : ..... sur 15 pts

Problème 2 : ..... sur 15 pts

Problème 3 : ..... sur 10 pts

Problème 4 : ..... sur 10 pts

Problème 5 : ..... sur 10 pts

**Total : ..... sur 50 pts**

|      |
|------|
| Note |
|------|

Examineur-trice en charge de la correction : ..... Date : .....

Remarque éventuelle : .....  
.....

**Problème 1 : (obligatoire, 15 points)**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{2x+1}{x} \cdot e^x$

- a) Vérifier que la fonction  $f'$  définie par

$$f'(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2} \cdot e^x$$

correspond à la dérivée de  $f$ .

- b) Étudier cette fonction, c'est-à-dire donner le domaine de définition, les zéros et le signe de  $f$ , les équations des éventuelles asymptotes horizontales ou verticales, les coordonnées des points à tangente horizontale, l'étude de la croissance de  $f$  et finalement dessiner dans un repère orthonormé le graphe soigné de  $f$ .
- c) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente  $t$  au graphe de  $f$  en son point d'abscisse  $x_0 = 1$ , puis la représenter dans le même repère que le graphe de  $f$ .
- d) Sur cette même représentation graphique, représenter en couleur le graphe de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = f(x-1)$ .

**Problème 2 : (obligatoire, 15 points)**

On considère le cercle  $c_1$  d'équation  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 18 = 0$ , ainsi que les points  $A(3; 3)$  et  $B(-6; 3)$ .

- a) Vérifier que  $C(1; -1)$  est le centre de  $c_1$  et que son rayon vaut  $r_1 = 2\sqrt{5}$ .
- b) Déterminer par calcul la position relative des points  $A$  et  $B$  par rapport au cercle  $c_1$ .

On considère des tangentes au cercle  $c_1$  :

- la tangente  $t_1$  passant par le point  $A$ ;
  - la tangente  $t_2$  de pente négative passant par le point  $B$ .
- c) Déterminer par calcul l'équation cartésienne de  $t_1$ , puis montrer que  $t_2$  a comme équation :  $y = -2x - 9$ .

Si vous n'avez pas répondu à la question (c), utilisez l'expression suivante pour la droite  $t_1$  :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- d) Calculer l'angle aigu entre les tangentes  $t_1$  et  $t_2$ .
- e) Donner l'équation du cercle  $c_2$  de centre  $C$  et dont le périmètre vaut  $12\pi$ .
- f) Déterminer l'équation d'un cercle  $c_3$  tangent aux droites  $t_1$  et  $t_2$  dont le centre admet une abscisse de 5.

**Indication :** Dans les faits, il y a deux cercles vérifiant ces conditions. On vous demande de déterminer l'équation d'un seul des deux cercles.

**Problème 3 : (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)**

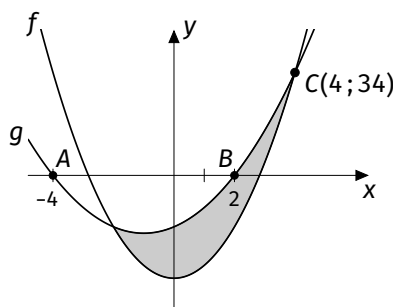
Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{17}{4}x^2 - 34$ .

- a) L'affirmation suivante est-elle exacte ? (Justifier votre réponse)

« Tout nombre réel possède au moins une préimage par  $f$  ».

- b) Résoudre l'inéquation  $f(x) < -\frac{51}{2}$ .

- c) À l'aide de l'esquisse proposée ci-dessous, décrire en quelques phrases une démarche permettant d'obtenir l'expression *factorisée* de la fonction  $g$  dont le graphe passe par les 3 points A, B et C indiqués.



- d) Pour la fin de l'exercice, on considérera que l'expression de la fonction  $g$  est :

$$g(x) = \frac{17}{8}x^2 + \frac{17}{4}x - 17.$$

Calculer alors l'aire de la surface grisée limitée par les graphes de  $f$  et de  $g$ .

**Problème 4 : (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)**

Une roue de fête foraine est composée de sept zones, chacune affichant un nombre entier différent compris entre 1 et 7.

Lorsqu'on la fait tourner, la roue étant truquée, on a pu observer qu'elle a deux fois plus de chances de s'arrêter sur un diviseur de 6 que sur chacun des autres nombres.

On fait tourner la roue une fois :

- a) Vérifier que la probabilité qu'elle s'arrête sur un diviseur de 6 vaut  $\frac{8}{11}$ .
- b) Calculer la probabilité qu'elle s'arrête sur un nombre inférieur à 7.
- c) La roue s'est arrêtée sur un diviseur de 6. Calculer la probabilité qu'elle s'arrête sur un nombre pair.

On fait tourner la roue deux fois de suite en notant, dans l'ordre, les deux nombres sur lesquels elle s'est arrêtée.

- d) Calculer la probabilité qu'elle s'arrête les deux fois sur le même nombre impair.
- e) Calculer la probabilité que la somme des deux nombres sur lesquels elle s'arrête vale 4.
- f) Sachant que la somme est supérieure à 12, calculer la probabilité que le premier nombre soit pair.

**Problème 5 : (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)**

On considère la droite  $d$  et le plan  $\alpha$  de représentations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -4 + 2\lambda \\ z = 12 - 4\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \alpha : \begin{cases} x = 2 + \mu + 3\nu \\ y = 2 - 2\nu \\ z = 1 - \mu \end{cases} \quad \mu \text{ et } \nu \in \mathbb{R}$$

- a) Vérifier que  $A(3; 2; 0)$  est un point de  $d$ , puis vérifier que la droite  $d$  est contenue dans le plan  $\alpha$ .
- b) Sur la représentation graphique ci-dessous, dessiner la partie visible de la droite  $d$  ainsi que les traces du plan  $\alpha$ .
- Définition :** Les traces d'un plan sont les droites d'intersection de celui-ci avec les trois plans de projection.
- c) Donner des équations paramétriques de la trace dans le sol du plan  $\alpha$ .
- d) Dessiner les traces du plan  $\beta$  qui contient la droite  $d$  et le point  $B(4; 0; 0)$ .
- e) Le point  $O(0; 0; 0)$  étant l'origine du système d'axes, calculer la valeur du plus grand des 3 angles du triangle  $OAB$ .

