



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2021

Mathématiques niveau normal

Résultats

Problème 1:	/15 points
Problème 2:	/15 points
Problème 3:	/10 points
Problème 4:	/10 points
Problème 5:	/10 points
Total:	/50 points

Candidat-e

Durée: 4 heures

Nom:

Prénom:

Numéro:

Correcteur(s)-trice(s)

Date:	Note
Signature:	

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement les problèmes 1 et 2 qui sont **obligatoires** puis **deux problèmes à choix** parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 (obligatoire, 15 points)

On considère le cercle $\gamma : x^2 + y^2 - 4x = 2y + 20$ et le point $A(4; -10)$.

- Montrer que le centre de γ est $C(2; 1)$ et que son rayon vaut $r = 5$.
- Vérifier par un calcul que le point A est extérieur au cercle.
- Montrer que la droite $t_1 : 24x - 7y - 166 = 0$ est une tangente au cercle γ passant par le point A .
- On donne t_2 , l'autre tangente à γ passant par le point A . Son équation est

$$t_2 : \begin{cases} x = 4 - 3\lambda \\ y = -10 + 4\lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calculer les coordonnées de son point de contact T avec le cercle γ .

- Donner l'équation de la droite d de pente $\frac{4}{3}$ telle que γ soit le cercle inscrit dans le triangle formé par les droites t_1 , t_2 et d .

Problème 2 (obligatoire, 15 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = (2x^2 + 3x)e^x$.

- Étudier cette fonction, c'est-à-dire donner le domaine de définition, les zéros et le signe de f , les équations des éventuelles asymptotes, les coordonnées des points à tangente horizontale, l'étude de la croissance de f et finalement dessiner dans un repère orthonormé le graphe soigné de f .
- Montrer que $F(x) = (2x^2 - x + 1)e^x$ est une primitive de f .
- Montrer que la droite $t : y = 3x$ est tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 0$. Dans le même repère que f , dessiner cette droite.
- Dans le premier quadrant, déterminer l'aire du domaine limité par la courbe $y = f(x)$, la droite t et la droite d'équation $x = 1/2$.

Problème 3 (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)

Une maladie touche 20% de la population d'un pays. Lors d'un dépistage de cette maladie, on utilise un test biologique qui a les caractéristiques suivantes :

- lorsqu'une personne est malade, la probabilité d'avoir un test positif est de 85%.
- lorsqu'une personne n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est de 95%.

On choisit une personne au hasard dans cette population.

- Montrer que la probabilité que cette personne soit testée positive est égale à 21%.
- Calculer la probabilité que cette personne soit malade avec un test négatif.
- Calculer la probabilité que cette personne soit testée positive sachant qu'elle est effectivement malade.

On appelle valeur prédictive positive du test, la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif. On estime que ce test est efficace pour une population donnée lorsque cette probabilité est supérieure à 95%.

- Calculer la valeur prédictive positive de ce test. Ce test est-il efficace sur la population étudiée ?

On choisit au hasard un échantillon de trois personnes testées positives dans cette population.

- Calculer la probabilité qu'au moins une de ces personnes ne soit pas malade.
- Calculer la probabilité que 2 personnes parmi les 3 soient effectivement malades.

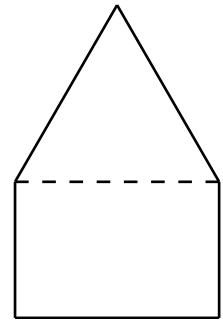
Malgré les recommandations (suivies ou non) édictées par les autorités du pays, la maladie a progressé jusqu'à atteindre le seuil critique de 60% de la population atteinte par cette maladie.

- Montrer que ce test peut alors être considéré comme efficace sur la population.

Problème 4 (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

On a dessiné une figure formée d'un rectangle et d'un triangle équilatéral.

- a) Sachant que l'aire du rectangle vaut 100 m^2 , déterminer par calcul les dimensions d'un côté du triangle afin que le périmètre total de la figure ci-contre soit optimal.
- b) S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum? Justifier votre réponse.



Problème 5 (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

On a dessiné le plan α dans le repère ci-dessous.

- a) Donner une représentation paramétrique du plan α .
- b) Trouver a et b afin que le point $A(2021; a; b)$ soit un point de la trace α' .
- c) Montrer que le point $B(1; 2; 4)$ n'est pas un point de α .
- d) Donner une représentation paramétrique d'un plan vertical β contenant le point B et dont la trace dans le sol est parallèle à α' . Dessiner les traces de β .
- e) Dessiner la droite i d'intersection entre les plans α et β . Donner une représentation paramétrique de i .
- f) Soit C le point de i le plus proche de B . Placer dans le repère le point C . Déduire la distance entre le point B et le point C .

