



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2020

MATHEMATIQUES, NIVEAU NORMAL

Durée : 4 heures

Candidat-e : Nom : Prénom : Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis **deux problèmes à choix** parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Problème 1 / 15 points
Problème 2 / 15 points
Problème 3 / 10 points
Problème 4 / 10 points
Problème 5 / 10 points

Total / 50 points

Note :

Correcteur(s)-trice(s) : Date : Signature :

Problème 1, géométrie plane (obligatoire, 15 points)

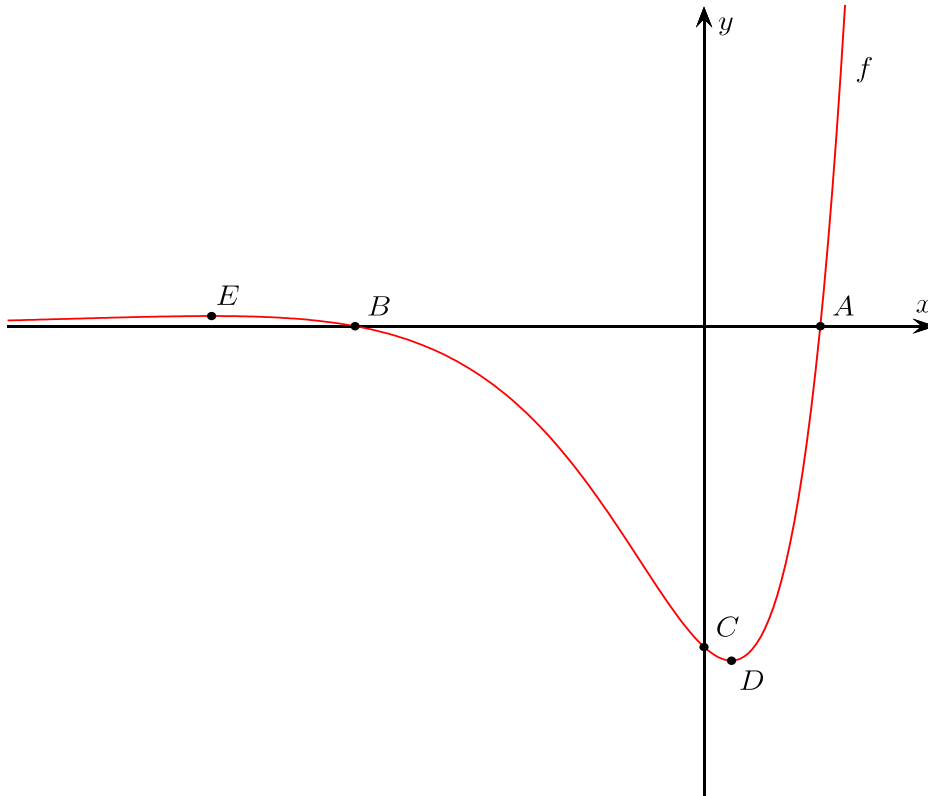
On considère les droites $d_1: 3x - 4y + 11 = 0$ et $d_2: 4x - (k + 5)y - 3 = 0$, ainsi que les points $P(3; 5)$ et $Q(10; -2)$.

- Montrer par calcul que le point P appartient à la droite d_1 .
- Calculer la distance du point Q à la droite d_1 .
- Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de k la droite d_2 est parallèle à la droite d_1 , et pour quelle(s) valeur(s) de k la droite d_2 est perpendiculaire à la droite d_1 .
- Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale du point Q sur la droite d_1 .
- Déterminer l'équation de la médiatrice du segment PQ .
- Déterminer l'équation du cercle tangent à d_1 en P et passant par Q .

Problème 2, analyse (obligatoire, 15 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = (x - 1)(x + 3)e^x$ dont le graphe est donné ci-dessous.

- Calculer les coordonnées des points A, B, C, D et E .
Les points D et E sont des points à tangente horizontale.
- Représenter, dans le même repère que le graphe de f , le graphe de la fonction g définie par $g(x) = (x - 1)(x + 3)$.
- Montrer que $F(x) = (x^2 - 3)e^x$ est une primitive de $f(x)$.
- Les graphes de f et de g forment une surface fermée, formée de deux parties. Calculer l'aire de cette surface.
- Calculer l'angle aigu sous lequel le graphe de f coupe l'axe des ordonnées.



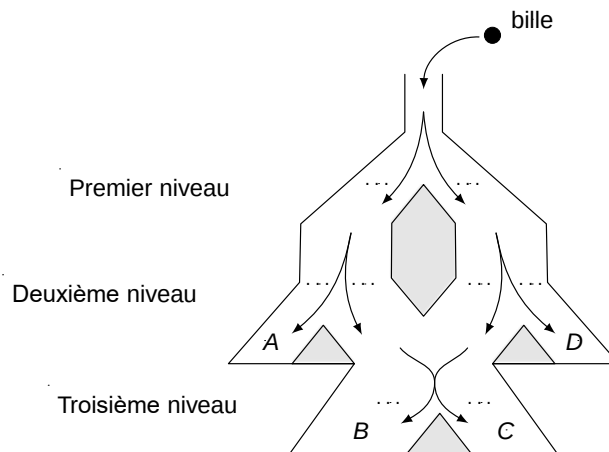
Problème 3, optimisation (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)

On coupe une corde de 60 cm en deux parties. La première partie sert à former un triangle équilatéral, et la seconde un carré.

- Déterminer la longueur du côté du triangle équilatéral pour que la somme des aires des deux figures soit minimale.
- Déterminer la longueur du côté du triangle équilatéral pour que la somme des aires des deux figures soit maximale.

Problème 4, probabilités (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

On considère le dispositif vertical représenté ci-dessous. Une bille lâchée au sommet du dispositif tombe jusqu'à l'un des réceptacles A , B , C ou D dans lequel elle s'arrête.



La chute va se dérouler ainsi :

- au premier niveau, la bille peut aller à gauche ou à droite avec la même probabilité de $\frac{1}{2}$;
- au deuxième niveau, la bille peut soit aller dans l'un des réceptacles A ou D avec une probabilité de $\frac{1}{4}$, soit continuer à tomber par le milieu avec une probabilité de $\frac{3}{4}$;
- au troisième niveau, la bille peut soit aller dans le réceptacle B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$, soit aller dans le réceptacle C avec une probabilité de $\frac{1}{3}$.

De plus, la bille arrivée

- dans le réceptacle A donne 5 points ;
- dans le réceptacle B donne 3 points ;
- dans le réceptacle C donne 5 points ;
- dans le réceptacle D donne 7 points.

A) On lâche une bille.

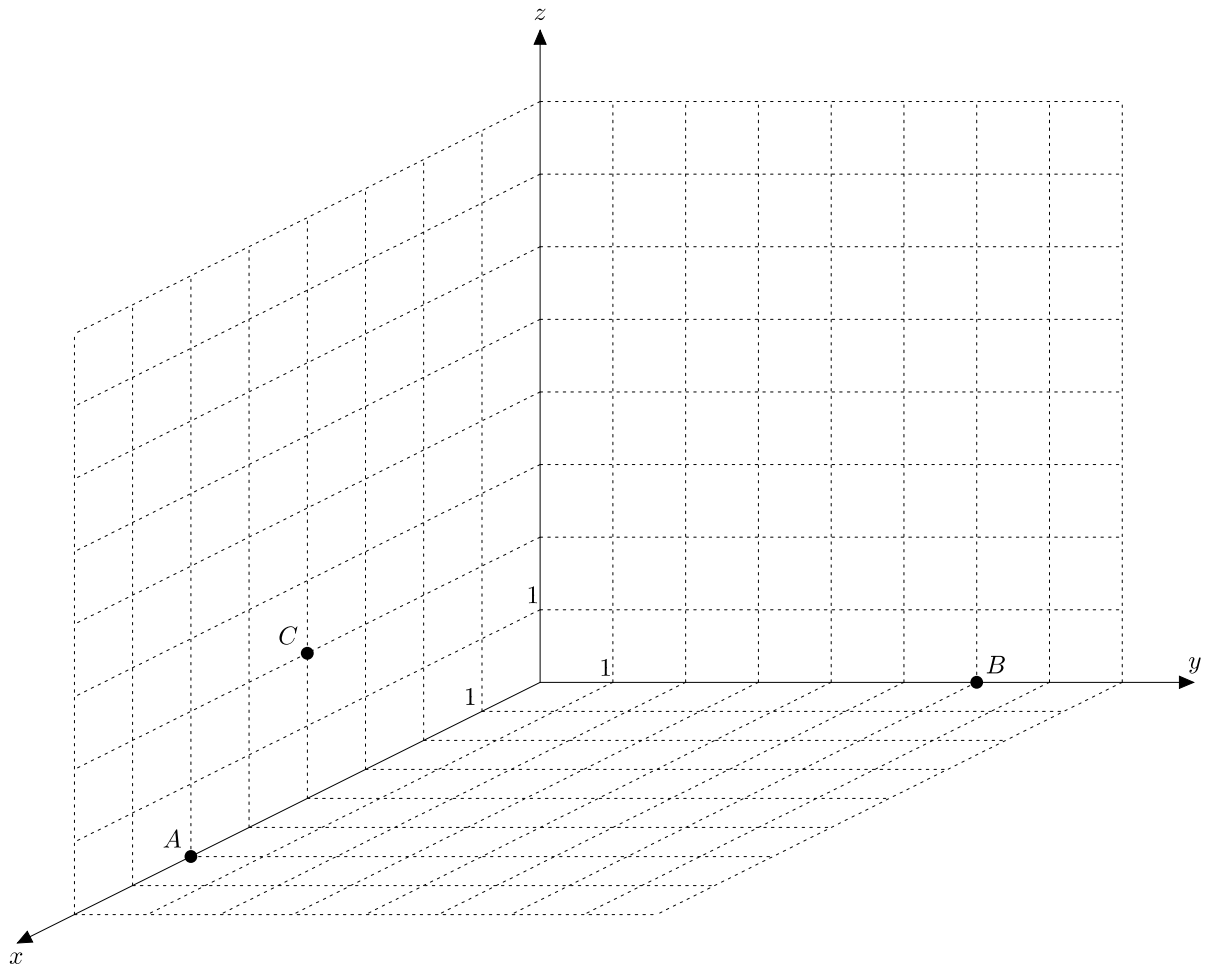
- Montrer que la probabilité que la bille donne exactement 3 points est de $\frac{1}{2}$;
- Quelle est la probabilité que la bille donne exactement 5 points ?
- Sachant que cette bille a donné 5 points, quelle est la probabilité qu'elle soit tombée dans le réceptacle A ?

B) On lâche deux billes, l'une après l'autre.

- Quelle est la probabilité que les deux billes donnent au total 10 points ?
- Quelle est la probabilité que les deux billes donnent un total d'au moins 8 points ?

Problème 5, géométrie de l'espace (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

Dans le repère orthonormé $Oxyz$ proposé ci-dessous, on considère les points A , B , C et D définis par $A(6; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$, $C(4; 0; 2)$ et $D(2; 1; 3)$.



- Déterminer une représentation paramétrique du plan α passant par les points A , B et C .
- Déterminer algébriquement les coordonnées du point E , intersection du plan α et de l'axe Oz .
- Déterminer la nature du triangle ABE .
- Représenter le plan α sur la figure ci-dessus.
- Représenter le point D sur la figure ci-dessus, puis montrer que ce point est dans le plan α .
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite horizontale h contenue dans le plan α et passant par D . Représenter sur la figure ci-dessus la partie visible de la droite h .

On s'intéresse à la sphère centrée dans le plan α et passant par les points A , B et E .

- Déterminer les coordonnées du centre S et le rayon de cette sphère.