



## Examen suisse de maturité, session d'hiver 2019 Mathématiques niveau normal

Durée : 4 heures

Candidat : Nom : ..... Prénom : ..... Groupe : .....

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement les problèmes 1 et 2 ainsi que deux des trois problèmes suivants. Le nombre de points maximum est 50.

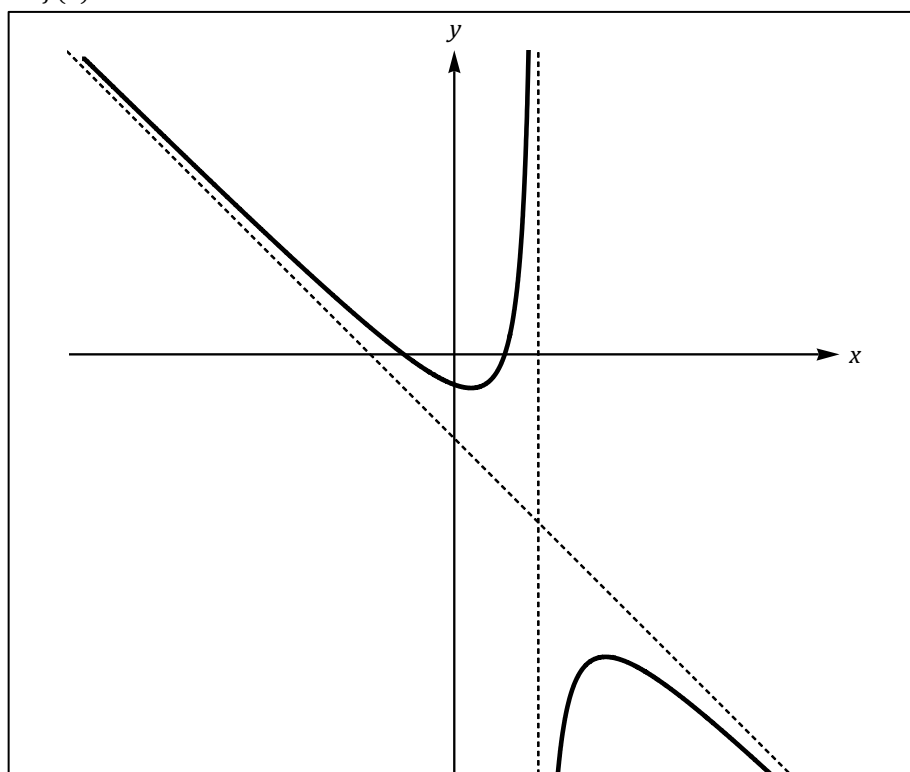
Correcteur : Date : ..... Signature : ..... Nb. de points : .....

Note :

### Problème 1 (obligatoire, 15 points)

Le graphe de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2-9}{5-x}$  est donné ci-dessous.

- a) Préciser l'ensemble de définition, les coordonnées des points d'intersection avec les axes de référence, les équations des asymptotes, l'expression de la dérivée et les coordonnées des extrema.
- b) Après avoir montré que la fonction  $f$  peut s'écrire  $f(x) = -x - 5 + \frac{16}{5-x}$ , donner une primitive de  $f$ , puis déterminer l'aire de la surface fermée comprise entre le graphe de  $f$  et la droite  $y = 7$ .  
Hachurer cette surface sur le dessin ci-dessous.
- c) Donner l'ensemble de définition et les équations des asymptotes de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ , puis esquisser son graphe sur le dessin ci-dessous.



## Problème 2 (obligatoire, 15 points)

On considère les cercles  $c_1: (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 4$  et  $c_2: x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$  ainsi que la droite  $d: 4x + 3y + 7 = 0$ .

- Dessiner dans un système d'axes orthonormé les cercles  $c_1$  et  $c_2$  ainsi que la droite  $d$ .
- Vérifier par un calcul que la droite  $d$  est tangente au cercle  $c_1$ .
- Donner l'équation de la droite parallèle à la droite  $d$  et également tangente au cercle  $c_1$ .
- Vérifier par un calcul que les cercles  $c_1$  et  $c_2$  sont tangents, puis trouver l'équation d'une droite  $t$  tangente aux 2 cercles.
- Donner les coordonnées du point d'intersection de la droite  $e$  d'équation  $y = x$  et de la droite  $d$  ainsi que des points d'intersection de la droite  $e$  et du cercle  $c_2$ .

## Problème 3 (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)

À l'issue d'une compétition, des sportifs sont contrôlés par un comité antidopage qui doit se prononcer et les déclarer positifs ou négatifs à une substance testée. Or, certains produits dopants restent indétectables aux contrôles et le test utilisé par le comité n'est pas fiable à 100%.

Plus précisément :

- la probabilité qu'un sportif dopé soit déclaré positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'un sportif non dopé soit déclaré positif est 0,005.

Le comité prend donc sa décision avec un risque d'erreur.

L'expérience a montré que, dans ce genre de compétition, 8% des participants sont dopés.

Lors d'une compétition, un sportif est choisi au hasard et contrôlé.

- Montrer que la probabilité que ce sportif soit déclaré négatif est 0,9162.
- Quelle est la probabilité que le comité ait commis une erreur ?

Le sportif a été déclaré négatif.

- Quelle est la probabilité qu'il se soit néanmoins dopé ?

Le sportif a été déclaré positif.

- Quelle est la probabilité que le comité n'ait pas commis d'erreur ?

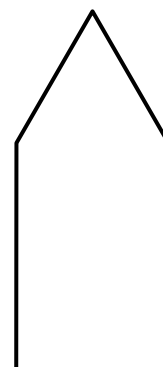
Lors de cette même compétition, cinq nouveaux sportifs ont été choisis au hasard et contrôlés.

- Quelle est la probabilité que les 5 sportifs soient déclarés négatifs ?
- Quelle est la probabilité qu'au moins un sportif soit déclaré négatif ?

## Problème 4 (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

On dispose de 2 mètres de baguettes avec lesquels on souhaite encadrer une surface formée d'un rectangle surmonté d'un triangle équilatéral.

- Montrer que, si  $x$  désigne la base du rectangle, alors l'aire de la surface totale est donnée par  $A(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)x^2 + x$ .
- Quelle est l'aire de la surface maximale que l'on peut ainsi obtenir ?



### Problème 5 (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

Dans le système d'axes orthonormé  $Oxyz$  proposé ci-dessous, on considère les points  $A(2; 1; 4)$ ,  $B(2; 0; 6)$ ,  $C(4; 3; 2)$  et  $D(4; \frac{3}{2}; 5)$ .

- a) Démontrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés et définissent un plan  $\alpha$  dont on demande une équation.
- b) À partir de la figure, déterminer l'abscisse du point  $E(\dots; 9; 8)$ .
- c) Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur la figure ci-dessous.
- d) Démontrer que le point  $D$  appartient au plan  $\alpha$ .
- e) Déterminer les coordonnées du point  $F$  défini par la relation vectorielle  $2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}$ .

