



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2018

MATHEMATIQUES NIVEAU NORMAL

Durée : 4 heures

Note :

Candidat :

Nom :

Prénom :

Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis **deux problèmes à choix** parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Correction :

Total : / 50 points

Date et signature :

Problème 1 (obligatoire, 15 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+6x}{2x-4}$.

- Étudier la fonction f (ensemble de définition, zéros, asymptotes, croissance et extréma, graphe).
- Après avoir montré que la fonction f peut s'écrire $f(x) = \frac{1}{2}x + 4 + \frac{8}{x-2}$, calculer l'aire de la surface finie délimitée par le graphe de f et l'axe des x .
- Établir l'équation de la tangente au graphe de f en un point P_0 d'abscisse $x_0 = 4$. Dessiner cette tangente.
- Pour quelles valeurs de x_1 la tangente au graphe de f en P_1 d'abscisse x_1 forme-t-elle, avec les axes de références, un triangle isocèle ?

Problème 2 (obligatoire, 15 points)

Relativement à un repère orthonormé, on considère le cercle $c : x^2 + y^2 + 16x - 12y = 0$, la droite $t : 3x + 4y - 50 = 0$ et le point $A(15; -5)$.

- Montrer que t est tangente à c au point $T(-2; 14)$.
- Montrer que l'origine O est un point de c et que la tangente t' à c en O est perpendiculaire à t .
- Soit la droite passant par A et O . Elle coupe t en un point P et c en un point Q distinct de O . Déterminer les coordonnées de P et Q .
- On note $\delta(D; E)$ la distance entre deux points D et E .
Montrer que $\delta^2(P; T) = \delta(P; O) \cdot \delta(P; Q)$.
- Déterminer l'équation du cercle circonscrit au triangle POT .

Problème 3 (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)

Une roue est composée de huit zones affichant chacune un nombre différent compris entre 1 et 8. Lorsqu'on fait tourner cette roue, elle a trois fois plus de chances de s'arrêter sur un diviseur de 4 que sur un autre nombre.

- a) Montrer que la probabilité qu'elle s'arrête sur 2 est de $\frac{3}{14}$.
- b) Calculer la probabilité qu'elle s'arrête sur un diviseur de 4.
- c) Calculer la probabilité qu'elle s'arrête sur un nombre inférieur à 8.
- d) La roue s'est arrêtée sur un diviseur de 4. Calculer la probabilité qu'elle s'arrête sur 4.

On fait tourner la roue deux fois de suite en notant, dans l'ordre, les deux nombres sur lesquels elle s'est arrêtée.

- e) Calculer la probabilité qu'elle s'arrête les deux fois sur le même nombre.
- f) Calculer la probabilité que la somme des deux nombres sur lesquels elle s'arrête soit égale à 4.

Problème 4 (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

Comme vous le savez, le prix du riz à l'exportation a doublé depuis février 2016 pour atteindre un sommet historique en février 2017 avec un prix de plus de 0.40 CHF/kg. Le tout a alors posé de gros problèmes de nutrition dans les régions du monde les moins riches.

Si un fermier effectue sa récolte de riz aujourd'hui, il obtiendra 12 tonnes valant 0.40 CHF/kg. Pour chaque semaine d'attente, la récolte augmente de 1 tonne, mais le prix baisse de 0.02 CHF/kg.

- a) Montrer que si le fermier attend 6 semaines, alors son chiffre d'affaires sera de 5040 CHF.
- b) Quand devra-t-il effectuer sa récolte pour optimiser son chiffre d'affaires ?
- c) Que va valoir son chiffre d'affaires optimal ? S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum ?

Problème 5 (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

On donne le plan $\alpha : \begin{cases} x = 3 + \lambda + \mu \\ y = -3\lambda \\ z = -2\mu \end{cases}$ et le plan vertical β par ses traces dans le dessin ci-dessous. On donne également les points A et B , où A est un point du sol et B est un point du mur (le mur étant le plan défini par les axes Oy et Oz).

- Donner une équation du plan β ainsi que de la droite d qui passe par A et B .
- Représenter graphiquement le plan α par ses traces dans le dessin ci-dessous.
- Dessiner la droite i d'intersection des plans α et β ainsi que le point d'intersection I de la droite d et du plan β .
- La droite e passe par le point $E(1; 2; 2)$ et son vecteur directeur est $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Les droites d et e se coupent-elles ? Justifier la réponse par un calcul.
- En supposant que le plan α est opaque, le point $C(2; 2; 1)$ est-il visible depuis l'origine $O(0; 0; 0)$? Justifier la réponse par un calcul.

