

## Examen suisse de maturité, session d'hiver 2017

### Mathématiques niveau normal

Candidat : Nom : ..... Prénom : ..... Groupe : .....

Correcteur : Date : ..... Signature : ..... Note : 

|  |
|--|
|  |
|--|

Durée : 4 heures

**Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement les problèmes 1 et 2 ainsi que deux des trois problèmes suivants. Le nombre de points maximum est 50.**

#### Problème 1 (obligatoire, 15 points)

Dans un repère orthonormé  $Oxy$ , on considère les points  $A(-2; 4)$ ,  $B(2; 2)$  et  $C(0; -2)$ .

- Décider par calcul si ce triangle  $ABC$  est isocèle.
- Déterminer par calcul une équation de la médiatrice du côté  $AC$ .
- Sachant que l'équation de la médiatrice du côté  $AB$  est  $2x - y + 3 = 0$ , calculer l'équation du cercle  $c$  circonscrit au triangle  $ABC$ .
- Sachant que  $\overrightarrow{OD} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ), déterminer par calcul tous les points  $D$  possibles pour lesquels le triangle  $ABD$  est rectangle en  $D$ .
- Déterminer par calcul tous les points  $E$  possibles situés sur l'axe  $Oy$  pour lesquels le triangle  $ABE$  est isocèle en  $A$ .

#### Problème 2 (obligatoire, 15 points)

On donne la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x}$ .

- Étudier la fonction  $f$  (ensemble de définition, zéro(s), asymptotes, croissance et extrema) puis dessiner son graphe.
- Vérifier que la fonction  $H(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$  est une primitive de la fonction  $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ .
- Déterminer l'aire de la surface fermée comprise entre le graphe de  $f$ , l'axe  $Ox$  et la droite  $x = 1$ .
- Pour quelles valeurs de  $k$  a-t-on  $\int_k^e f(x) dx = 0$  ?
- La tangente au graphe de  $f$  en son point d'intersection avec l'axe  $Ox$  forme un triangle avec les axes de référence. Donner l'aire de ce triangle.

### Problème 3 (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)

Amateur de sudoku, Pierre s'entraîne sur un site internet. 40% des grilles de sudoku qui y sont proposées sont de niveau facile, 30% sont de niveau moyen et les autres de niveau difficile.

Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95% des cas, les grilles de sudoku de niveau moyen dans 60% des cas et les grilles de sudoku de niveau difficile dans 40% des cas.

- Une grille de sudoku lui est proposée de façon aléatoire.
  - a) Calculer la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse.
  - b) Calculer la probabilité que la grille proposée soit de niveau facile ou moyen et que Pierre ne la réussisse pas.
  - c) Calculer la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée.
  - d) Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen ?
  - e) Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme : "Je pense que ta grille était facile". Qu'en pensez-vous ? (Justifier votre réponse par un calcul)
- Le site internet organise un concours. Chaque participant doit résoudre trois grilles (une pour chaque niveau de difficulté). Celles-ci seront proposées dans l'ordre croissant de difficulté.
  - f) Calculer la probabilité que Pierre réussisse les trois grilles proposées.
  - g) Calculer la probabilité que Pierre réussisse au moins une des grilles proposées.

### Problème 4 (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

Il est parfois pénible d'avoir un grand-père mathématicien ! En effet, dernièrement il annonce fièrement :

« Je voudrais partager 240 CHF entre mes deux petits-enfants de telle manière que le produit du carré de la part de l'ainé par le double de la part du cadet, diminué de 60 CHF, soit le plus grand possible ».

Calculer la part de chaque enfant pour que la volonté du grand-père soit respectée.

**Problème 5 (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)**

- a) Dans le repère orthonormé ci-dessous, représenter les points  $A(2; 0; 4)$  et  $C(0; 0; 1)$ .
- b) Déterminer les coordonnées du point  $B$  donné dans le dessin ci-dessous et situé dans le plan  $Oyz$ .
- c) Représenter ci-dessous le plan  $\alpha$  passant par les 3 points  $A, B$  et  $C$ . Déterminer une équation de ce plan.
- d) Représenter le plan  $\beta$  d'équation paramétrique
- $$\beta: \begin{cases} x = 2 - 2k - 2l \\ y = 0 + 3k \\ z = 4 + 2l \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R})$$
- e) Déterminer une équation paramétrique de la droite  $d$ , intersection des plans  $\alpha$  et  $\beta$ .
- f) Déterminer une équation du plan  $\gamma$  vertical parallèle à  $d$  et passant par  $V(4; 0; 0)$ .
- g) Compléter la figure ci-dessous en indiquant clairement la visibilité des 3 plans  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  et de la droite  $d$ .

