



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2016

MATHEMATIQUES NIVEAU NORMAL

Durée : 4 heures

Note :

Candidat : Nom : Prénom : Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont obligatoires ;
- puis deux problèmes à choix parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Correcteur(s) : Date :

Signature(s) :

Problème 1 (obligatoire, 15 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2 + 4x \cdot e^x$.

- a) Étudier la fonction f (ensemble de définition, intersection avec l'axe Oy , équation des éventuelles asymptotes, extrema et graphe).
- b) Dessiner, dans le repère utilisé pour le graphe de f , la droite d d'équation $y = 2 + x$, puis déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite d et du graphe de f .
- c) On pose $G(x) = (ax + b) \cdot e^x$, où a et b sont des paramètres réels non nuls. Déterminer les valeurs de a et b pour que G soit une primitive de $g(x) = x \cdot e^x$.
- d) Calculer l'aire de la surface fermée comprise entre la droite d et le graphe de f .
- e) Déterminer pour quelle valeur de k le graphe de la fonction $h(x) = k + 4x \cdot e^x$ est tangent à l'axe Ox .

Problème 2 (obligatoire, 15 points)

Dans un repère orthonormé Oxy , on donne :

- les points $A(6; -3)$ et $B(4; -7)$;
 - la droite d d'équation $d : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -9 + 8t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$;
 - le cercle c_1 d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$.
- a) Vérifier que les points A et B sont situés sur la droite d .
 - b) Déterminer le rayon r_1 et les coordonnées du centre C_1 du cercle c_1 .
 - c) Montrer que la droite d est tangente au cercle c_1 .
 - d) Montrer que A appartient au cercle c_1 , puis calculer l'aire du triangle ABC_1 .
 - e) Déterminer l'équation du cercle c_2 passant par les points A et B et dont l'abscisse du centre vaut 1.

Problème 3 (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)

Une représentation simplifiée des conditions météorologiques consiste à classer le temps en trois catégories : beau, variable et mauvais.

Le tableau suivant fournit la probabilité pour avoir un temps donné le lendemain en fonction du temps du jour même.

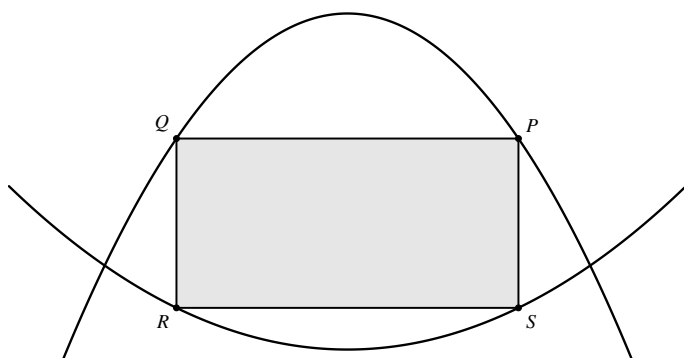
météo du jour → météo du lendemain ↓	beau	variable	mauvais
beau	0,6	0,3	0,1
variable	0,3	0,4	0,3
mauvais	0,1	0,3	0,6

Il est vendredi et il fait beau.

- a) Montrer que la probabilité qu'il fasse mauvais samedi puis variable dimanche est de 3%.
- b) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau samedi et dimanche ?
- c) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau dimanche ?
- d) Quelle est la probabilité qu'il fasse mauvais le samedi ou bien le dimanche ?
- e) Quelle est la probabilité que la météo soit différente le vendredi, le samedi et le dimanche ?
- f) Sachant que le temps sera variable dimanche, quelle est la probabilité qu'il fera beau le samedi ?
- g) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau jusqu'au vendredi suivant (vendredi y compris) ?

Problème 4 (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

On considère 2 fonctions f et g définies par $f(x) = -3x^2 + 9$ et $g(x) = x^2 - 3$.



Dans le domaine borné délimité par le graphe de ces 2 fonctions, on inscrit le rectangle $PQRS$ comme indiqué sur la figure ci-dessus.

- a) Dans la figure ci-dessus, poser le système d'axes Oxy gradué correspondant.
- b) Déterminer les coordonnées du point $P(x; f(x))$ assurant au rectangle $PQRS$ une aire maximale. Que vaut alors cette aire maximale ?

Problème 5 (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

Dans le système d'axes $Oxyz$ proposé ci-dessous, on donne le plan vertical α et le plan β .

- Donner une représentation paramétrique de la droite d qui passe par les points $S(3; 6; 0)$ et $Z(0; 0; 2)$, puis dessiner cette droite dans le repère ci-dessous.
- Donner une représentation paramétrique des plans α et β .
- Construire la droite d'intersection e des plans α et β , puis donner une équation paramétrique de cette droite.
- Construire les points d'intersection I et J de la droite d avec les plans α et β , puis calculer les coordonnées du point I (intersection de la droite d avec le plan α).
- Donner l'équation du plan π qui contient la droite d et le point $D(3; 0; 0)$, puis dessiner ce plan π .

