



Examen suisse de maturité, session d'été 2015

Mathématiques niveau normal

Note :

Durée : 4 heures

Candidat : Nom :

Prénom :

Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :
- les problèmes 1 et 2 qui sont **obligatoires**
- puis **deux problèmes à choix** parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Correction : Nombre de points :/50 points

Problème 1 : (obligatoire, 15 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 8}{(2 - x)^2}$ dont on précise également la dérivée seconde : $f''(x) = \frac{8(x - 5)}{(2 - x)^4}$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition, le(s) zéro(s), le signe de f .
- b) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes de f .
- c) Étudier la croissance de f puis donner les coordonnées de ses éventuels extrema.
- d) Calculer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de f .
- e) Représenter le graphe de f .
- f) Déterminer l'équation de la tangente t au graphe de f en son point d'abscisse $x = 0$.
- g) Calculer l'aire du domaine délimité par les asymptotes et la tangente t .

Problème 2 : (obligatoire, 15 points)

Dans un repère orthonormé Oxy , on donne :

- les points $A(-1; -5)$ et $B(5; 3)$;
- la droite d d'équation $x + 2y = 0$;
- le cercle γ d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.

- Déterminer le centre C et le rayon r du cercle γ .
- Le segment AB est-il un diamètre du cercle γ ? (Justifier par calculs)
- Calculer les coordonnées des points d'intersection entre la droite d et le cercle γ .
- Calculer l'aire du triangle ABD , où D est le point d'intersection entre la droite d et l'axe Oy .
- Calculer la valeur de l'angle aigu compris entre la droite d et l'axe Oy .

Problème 3 : (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)

On propose à Alexandra le jeu suivant :

À plusieurs reprises, elle pourra jeter un dé à 6 faces, mais au maximum 4 fois. Elle gagnera 5 francs chaque fois que le dé affichera un nombre différent de 2, mais perdra 10 francs si celui-ci affiche le nombre 2. Alexandra devra arrêter de jouer dès qu'elle gagnera au moins 15 francs ou sitôt qu'elle perdra de l'argent ou encore, de toute façon, après avoir jeté le dé 4 fois.

- Représenter cette situation par un arbre.
- Calculer la probabilité qu'Alexandra perde de l'argent à ce jeu.
- Calculer la probabilité, qu'à la fin du jeu, elle gagne au moins 10 francs.
- Calculer la probabilité qu'Alexandra puisse jeter 4 fois le dé.
- Sachant que le dé a été jeté au moins trois fois, calculer la probabilité qu'Alexandra gagne de l'argent à ce jeu.

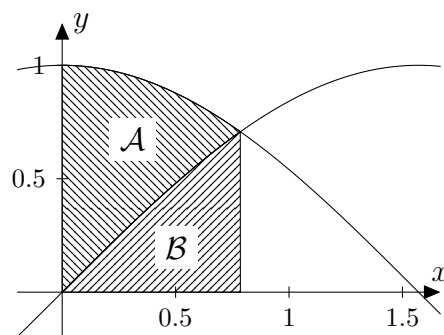
Problème 4 : (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$.

On considère les 2 surfaces hachurées $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ représentées sur la figure ci-contre.

On désigne par $\text{Aire}(\mathcal{A})$ et $\text{Aire}(\mathcal{B})$, l'aire de ces 2 surfaces.

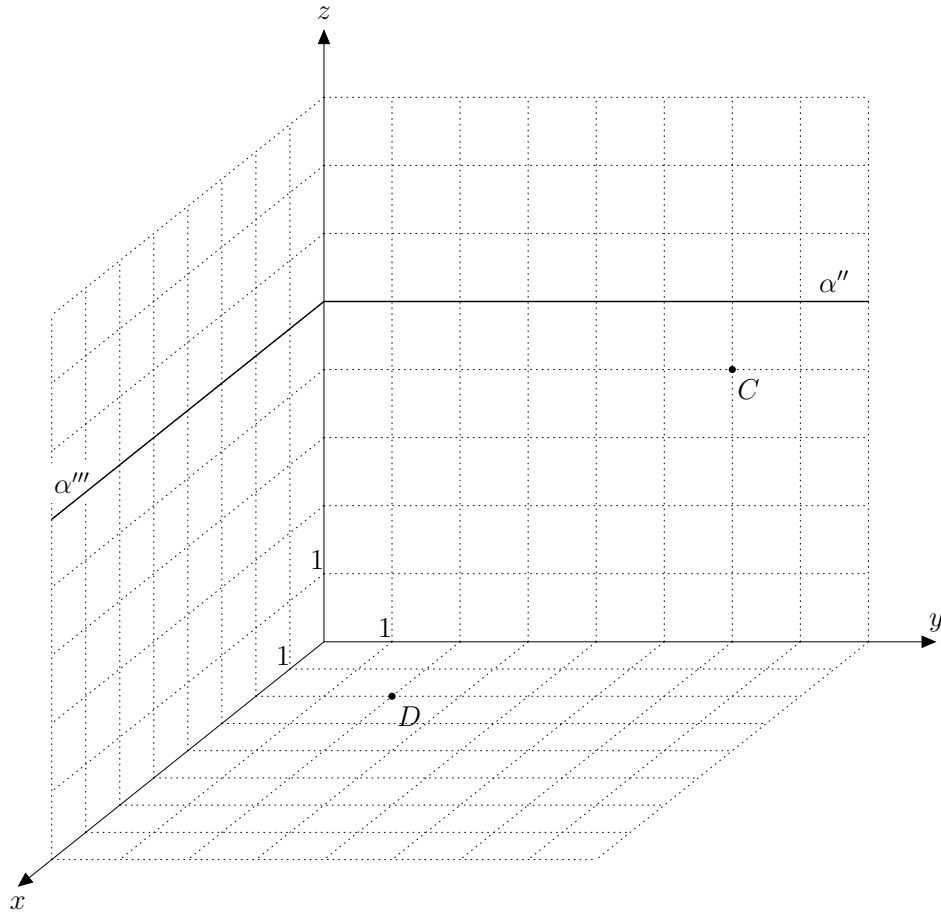
- Montrer que : $\text{Aire}(\mathcal{A}) = \sqrt{2} - 1$.
- Montrer que : $\text{Aire}(\mathcal{A}) = \frac{\text{Aire}(\mathcal{B})}{1 - \text{Aire}(\mathcal{B})}$.



Problème 5 : (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormé $Oxyz$, on donne les points suivants :

$$A(6;0;4) \quad B(4;4;8) \quad C(0;6;4) \quad D(2;2;0)$$



- a) Compléter la figure ci-dessus en représentant les points A et B .
- b) Montrer, par calcul, que $ABCD$ est un carré.
- c) Déterminer une équation du plan π contenant le carré $ABCD$.
- d) Montrer, par calcul, que le point $E(4;0;0)$ est situé dans le plan π .
- e) Représenter le plan π dans le repère ci-dessus.
- f) Déterminer une équation du plan α donné par ses traces α'' et α''' .
- g) Représenter en couleur l'ensemble des points du carré $ABCD$ situés dans le plan α .