



Examen suisse de maturité, session d'hiver 2013 Mathématiques niveau normal

Candidat : Nom : Prénom : Groupe :

Correcteur : Date : Signature :

Note :

Durée : 4 heures

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement les problèmes 1 et 2 ainsi que deux des trois problèmes suivants. Le nombre de points maximum est 50.

Problème 1 (obligatoire, 16 points)

On considère la fonction f donnée par $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2$.

- Déterminer l'ensemble de définition, puis étudier le signe de f .
- Déterminer les équations cartésiennes des éventuelles asymptotes de f .
- Vérifier par des calculs détaillés que $f'(x) = -\frac{4+3x}{x^3}$.
- Étudier la croissance de f , puis donner les coordonnées des éventuels extrema de f .
- Tracer avec soin le graphe de f et de son (ses) asymptotes.
- Déterminer l'équation cartésienne de la tangente t au graphe de f en son point d'abscisse $x = 2$.
- Vérifier que $I(-\frac{2}{3}; 3)$ est un point d'intersection du graphe de f et de la tangente t .
- Déterminer l'aire de la surface fermée comprise entre l'axe Ox , le graphe de f et la tangente t .

Problème 2 (obligatoire, 14 points)

On considère la droite $a: x - 2y - 3 = 0$.

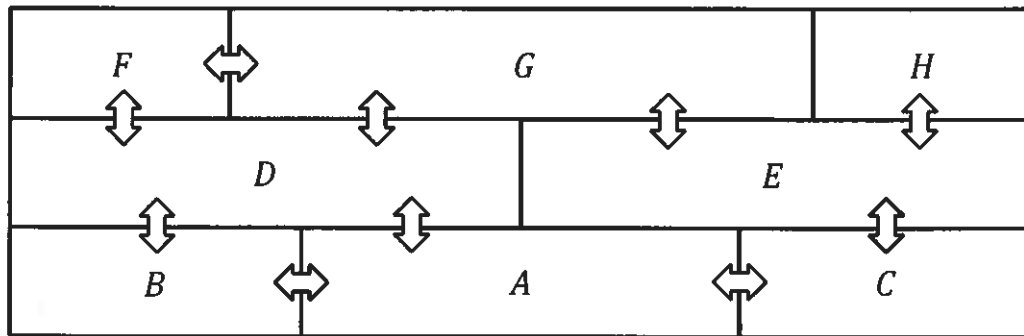
- a) Calculer l'angle aigu formé par a et la droite b d'équation $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On considère encore le cercle $\gamma: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ de centre C .

- b) Déterminer les coordonnées de C et le rayon r de γ .
c) Le point $P(4; -2)$ est-il plus proche de la droite a ou du point C ? Justifier par calcul.
d) La droite a coupe le cercle γ en deux points d'où l'on mène les tangentes. Calculer en quel point ces tangentes se coupent.

Problème 3 (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)

Samuel s'entraîne à un jeu vidéo. Il parcourt un labyrinthe schématisé par le dessin ci-dessous en commençant par la salle A . Les doubles flèches représentent des portes s'ouvrant dans les deux sens.



Son parcours est régi par les règles suivantes :

- il passe au hasard d'une salle à une autre, chaque porte étant équiprobable ;
- dès qu'il franchit une porte, elle se referme derrière lui, l'empêchant ainsi de la franchir à nouveau ;
- s'il franchit trois portes, toutes les portes se referment et la partie est terminée ;
- il gagne la partie dès qu'il arrive en G .

Samuel décide de jouer une partie.

- a) Construire l'arbre des différents trajets possibles.
b) Montrer que la probabilité du trajet $ABDF$ est de $\frac{1}{9}$.
c) Déterminer la probabilité qu'à la fin du jeu, il se retrouve en A .
d) Montrer que la probabilité que Samuel gagne est de $\frac{1}{2}$.

Samuel joue trois fois de suite. Les trois parties successives sont indépendantes.

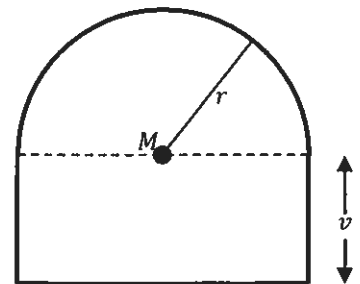
- e) Calculer la probabilité qu'il gagne une et une seule partie.
f) Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie.

Problème 4 (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

Une fenêtre est formée d'une partie rectangulaire de largeur v , surmontée d'une partie en forme de demi-cercle de rayon r et de centre M .

Le pourtour de la fenêtre mesure 6 mètres.

Déterminer les dimensions r et v de la fenêtre qui laisse passer le plus de lumière.



Problème 5 (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

Dans le système d'axes $Oxyz$ proposé ci-dessous :

- déterminer une équation du plan π donné par ses traces.
- Représenter le point $A(3; 4; 5)$.
- Le plan π étant considéré comme opaque, représenter la partie visible de la droite verticale v (v perpendiculaire au plan Oxy) passant par A .
- On considère le point $B(5; 3; 3)$. Calculer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection de la droite d qui passe par A et B avec le plan π .
- La droite d est-elle parallèle au plan Oyz ?

