



Examen suisse de maturité, session d'été 2013

Mathématiques niveau normal

Note :

Durée : 4 heures

Candidat : Nom :

Prénom :

Numéro :

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :
- les problèmes 1 et 2 qui sont **obligatoires**
- puis **deux problèmes à choix** parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Correcteur(s) : Date :

Signature(s) :

Problème 1 : (obligatoire, 17 points)

On considère la fonction f donnée par $f(x) = x^2 \cdot e^x$

- a) Déterminer l'ensemble de définition, les zéros, le signe de f , les équations des éventuelles asymptotes et les coordonnées des points à tangente horizontale de la fonction f .
- b) Représenter le graphe de f .
- c) Dans le même système d'axes que le graphe de f , représenter le graphe de $g(x) = e^x$ puis calculer les coordonnées des points d'intersection des graphes de f et de g .
- d) Vérifier que $F(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$ est une primitive de f , puis calculer l'aire de la surface fermée comprise entre les graphes de f et g .

On considère la fonction f_a donnée par $f_a(x) = (x^2 + a) \cdot e^x$

- e) Pour quelle(s) valeur(s) de a le graphe de f_a passe-t-il par le point $A(1; 1)$?
- f) Pour quelle(s) valeur(s) de a le graphe de f_a possède-t-il un seul point à tangente horizontale ? Donner alors l'équation de cette(ces) tangente(s).

Problème 2 : (obligatoire, 13 points)

Dans un repère orthonormé Oxy , on donne :

- les trois points $A(6; 10)$, $B(18; 4)$ et $K(4; 6)$;
- le cercle γ_1 , passant par A , d'équation $x^2 + y^2 - 18x - 2y - 8 = 0$.

- Montrer par calcul que le cercle γ_1 passe également par B .
- Trouver le centre et le rayon du cercle γ_1 .
- Calculer les coordonnées des points d'intersection du cercle γ_1 avec l'axe des ordonnées Oy . Noter J le point d'ordonnée négative.
- Prouver que les points A , K et J sont alignés.
- Donner une équation cartésienne de la droite d_1 , passant par le point K et parallèle à la droite passant par les points A et B .
- On appelle d_2 la droite passant par les points J et B . Calculer les coordonnées du point D , intersection des droites d_1 et d_2 .
- Montrer que le triangle KJD est rectangle en K .
- Déterminer l'équation du cercle γ_2 circonscrit au triangle KJD .

Problème 3 : (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)

Un dé à six faces est truqué de sorte qu'il affiche le nombre 6 deux fois plus souvent que chacun des autres nombres. On jette alors ce dé une fois.

- Montrer que la probabilité que ce dé affiche le nombre 6 est de $2/7$.

Le jeu consiste à jeter ce dé au maximum 4 fois de suite. On gagne un franc chaque fois que celui-ci affiche un nombre différent de 6 et on perd deux francs chaque fois que celui-ci affiche le nombre 6.

Après chaque jet, on fait le total des francs. On arrête le jeu dès que le gain ou la perte dépassent 1 franc ou que l'on ait déjà effectué les 4 jets.

- Calculer la probabilité de gagner au moins un franc à la fin de la partie.
- Calculer la probabilité de perdre de l'argent à la fin de ce jeu.
- Calculer la probabilité de n'avoir ni gagné ni perdu de l'argent à la fin de la partie.
- Sachant que l'on a perdu de l'argent, déterminer la probabilité que le jeu se soit arrêté après trois jets.

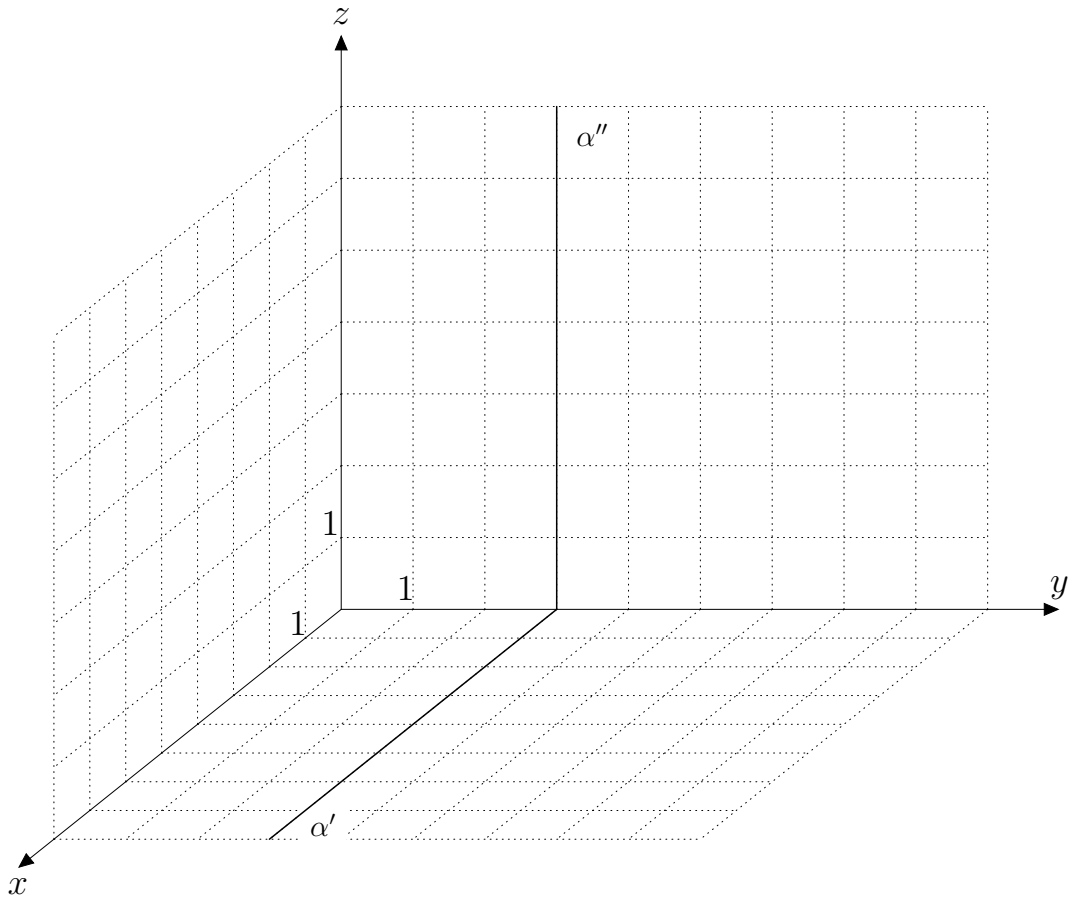
Problème 4 : (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

Un pomiculteur estime que s'il plante 35 pommiers dans un champ, la production moyenne par arbre sera de 400 pommes. Cette production diminuera de 4 pommes par pommier pour chaque arbre ajouté à l'intérieur du verger.

- Combien le pomiculteur doit-il planter de pommiers pour que la production totale soit maximale ?
- Que vaut alors cette production maximale ?

Problème 5 : (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

Dans le système d'axes $Oxyz$ proposé ci-dessous :



a) Déterminer une équation du plan α donné par ses traces α' et α'' .

b) Représenter le plan β d'équation :
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 2 \end{cases} \quad (\lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{R}).$$

c) En vous aidant de la figure ci-dessus, donner une équation de la droite d , intersection des 2 plans α et β .

d) Sur cette même figure, représenter le plan γ dont l'équation est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\delta \text{ et } \eta \in \mathbb{R}).$$

e) Déterminer les coordonnées du point I , intersection de la droite d et du plan γ .

f) Représenter ce point I sur la figure ci-dessus.